(1) 請證明和角公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta$$

.

(2) 利用和角公式，說明在二維xy-平面上，內積公式滿足：

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|u||v|\cos\theta$$

其中θ代表向量$\overrightarrow{u}$與向量$\overrightarrow{v}$的夾角。

(3) 利用上式二維平面上內積公式性質，說明在n維$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$-平面上，內積公式亦滿足：

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|u||v|\cos\theta$$

其中θ代表向量$\overrightarrow{u}$與向量$\overrightarrow{v}$的夾角。

(4) 令A爲一$n\times n$方陣,而且存在n對eigen value與eigen vectors配對，$(\lambda_i,\overrightarrow{x_i})_{i=1..n}$使得

$$A\overrightarrow{x_i}=\lambda_i\overrightarrow{x_i}$$

並且$\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\ldots,\overrightarrow{x_n}$爲$n$組線性獨立向量，令

$$D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{bmatrix};P=[\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\ldots,\overrightarrow{x_n}]$$

請說明，方陣A可對角化,並滿足下列公式：

$$A=PDP^{-1}$$

(5) 令

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

請求此方陣之2對eigen value與eigen vectors配對;並請求出方陣P與D；最後請（用計算）驗證：

$$A=PDP^{-1}$$

因此，請計算出A^{100}之公式。